

9-СЫНЫП АЛГЕБРА 16-САБАҚ ТАПСЫРМАЛАРЫ

1-есеп. Математикалық индукция принципін қолданып, төмендегі тұжырымдарды дәлелдеңдер: $1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$

Жауабы: $n=1$ болса, $S_1 = 1 = \frac{1(1+1)}{2}$, $n=k$ үшін $s_k = 1 + 2 + \dots + k = \frac{k(k+1)}{2}$ дұрыс болсын. Онда $n = k + 1$ үшін $s_{k+1} = s_k + (k + 1) = \frac{k(k+1)}{2} + (k + 1) = \frac{(k+1)(k+2)}{2}$.

2-есеп. Математикалық индукция принципін қолданып, төмендегі тұжырымдарды дәлелдеңдер: $1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$

Жауабы: $n=1$ болса, $S_1 = 1^3 = 1$, $\frac{n^2(n+1)^2}{4} = \frac{4}{4} = 1$ $n=k$ үшін $s_k = 1^3 + 2^3 + \dots + k^3 = \frac{k^2(k+1)^2}{4}$ дұрыс болсын. Онда $n = k + 1$ үшін $s_{k+1} = s_k + (k + 1)^3 = \frac{k^2(k+1)^2}{4} + (k + 1)^3 = \frac{(k+1)^2(k^2+4k+4)}{4} = \frac{(k+1)^2(k+2)^2}{4}$. Дәлелдеу керегі осы.

3-есеп. $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \dots + n(n + 1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$

Жауабы: $n=1$ болса, $S_1 = 1(1 + 1) = \frac{1(1+1)(1+2)}{3} = 2$, $n=k$ үшін $s_k = 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \dots + k(k + 1) = \frac{k(k+1)(k+2)}{3}$ дұрыс болсын. Онда $n = k + 1$ үшін $s_{k+1} = s_k + (k + 1)(k + 2) = \frac{k(k+1)(k+2)}{3} + (k + 1)(k + 2) = \frac{(k+1)(k+2)(k+3)}{3}$.

4-есеп. $\frac{1}{1 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 9} + \frac{1}{9 \cdot 13} + \dots + \frac{1}{(4n-3)(4n+1)} = \frac{n}{4n+1}$

Жауабы:

$n=1 \rightarrow \frac{1}{1 \cdot 5} = \frac{1}{5}$; $n = k \rightarrow S_k = \frac{1}{1 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 9} + \frac{1}{9 \cdot 13} + \dots + \frac{1}{(4k-3)(4k+1)} = \frac{k}{4k+1}$

$n=k+1 \rightarrow S_{k+1} = S_k + \frac{1}{(4k+1)(4k+5)} = \frac{k}{4k+1} + \frac{1}{(4k+1)(4k+5)} = \frac{(4k+1)(k+1)}{(4k+1)(4k+5)} = \frac{(k+1)}{(4k+5)}$

5-есеп. Әрбір натурал n саны үшін төмендегі тұжырымдарды дәлелдеңдер: $n^3 + 5n : 6$

Жауабы:

$n = 1 \rightarrow 1^3 + 5 \cdot 1 = 6, 6 : 6;$

$n = k \rightarrow k^3 + 5k : 6$

$n = k + 1 \rightarrow (k + 1)^3 + 5(k + 1) = k^3 + 3k^2 + 3k + 1 + 5k + 5 = (k^3 + 5k + 3(k^2 + k + 2)) : 6$

6-есеп. Өрбір натурал n саны үшін төмендегі тұжырымдарды дәлелдеңдер:
 $9^n - 8n - 9 : 8, n > 1$

Жауабы:

$$n = 1 \rightarrow 9^1 - 8 \cdot 1 - 9 = 56, 56 : 8;$$

$$n = k \rightarrow 9^k - 8k - 9 : 8$$

$$n = k + 1 \rightarrow 9^{k+1} - 8(k + 1) - 9 = 9 \cdot 9^k - 8k - 8 - 9 = \\ = (9(9^k - 8k - 9) + 64(k + 1)) : 8$$

7-есеп. Кез келген натурал n саны үшін $\frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 7} + \dots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$ қосындысын табыңдар.

Жауабы: $a_n = (2n - 1)^2$ формуласымен анықталатынын көрсетсе, жеткілікті.

8-есеп. $\{a_n\}$ тізбегі рекуренттік формуламен берілген: $a_1 = 1$,
 $a_{n+1} = a_n + 8n$ Тізбектің кез келген мүшесі бүтін санның толық квадратын анықтайтынын көрсетіндер.

Жауабы: $3^2, 5^2, 7^2, \dots$

9-есеп. Төмендегі тұжырымдардың n -нің кез келген натурал мәнінде егер $0 < a < b$ болса, онда $a^n < b^n$ орындалатынын көрсетіндер.

Жауабы:

$$n = 1 \rightarrow a^1 < b^1, a < b;$$

$$n = k \rightarrow a^k < b^k;$$

$$n = k + 1 \rightarrow a^{k+1} < b^{k+1}, a \cdot a^k < b \cdot b^k, a \cdot b^k < b \cdot b^k, a < b.$$

10-есеп. Натурал n санының көрсетілген мәндері үшін төмендегі теңсіздіктерді дәлелдеңдер: $2^n > 2n + 1, n \geq 3$

Жауабы:

$$n = 3 \rightarrow 2^3 > 2 \cdot 3 + 1, 8 > 7;$$

$$n = k \rightarrow 2^k > 2k + 1;$$

$$n = k + 1 \rightarrow 2^{k+1} > 2k + 3, 2 \cdot 2^k > 2k + 3, 2(2k + 1) > 2k + 3, \\ k > 0,5, \quad k > 3$$

11-есеп. n -нің кез келген натурал мәнінде: $5^n - 3^n + 2n$ өрнегінің мәні 4-ке еселік болатынын дәлелдеңдер.

Жауабы:

$$n = 1 \rightarrow 5^1 - 3^1 + 2 \cdot 1 = 4, 4 : 4;$$

$$n = k \rightarrow 5^k - 3^k + 2k : 4;$$

$$n = k + 1 \rightarrow 5^{k+1} - 3^{k+1} + 2(k + 1) = 5 \cdot 5^k - 3 \cdot 3^k + 2k + 2 = \\ = 5(5^k - 3^k + 2k) + 2(3^k - 4k + 1) : 4.$$

12-есеп. $2^{n+2} > 2n + 5$ теңсіздігі барлық натурал сандар үшін ақиқат екенін математикалық индукция әдісімен дәлелдеңдер.

Жауабы:

$$n = 1 \rightarrow 2^{1+2} > 2 \cdot 1 + 5, \quad 8 > 7;$$

$$n = k \rightarrow 2^{k+2} > 2k + 5;$$

$$n = k + 1 \rightarrow 2^{k+3} > 2k + 7, \quad 2 \cdot 2^{k+2} > 2k + 7, \quad 2(2k + 5) > 2k + 7, \\ k > -1,5, \quad k > 1$$

13-есеп. $\frac{n \cdot (2n^2 + 3n + 1)}{6}$ өрнегінің мәні n -нің кез келген натурал мәнінде натурал сан болатынын дәлелдеңдер.

Жауабы:

$$n = 1 \rightarrow \frac{1 \cdot (2 \cdot 1^2 + 3 \cdot 1 + 1)}{6} = 1 \in \mathbb{N};$$

$$n = k \rightarrow \frac{k \cdot (2 \cdot k^2 + 3 \cdot k + 1)}{6} \in \mathbb{N};$$

$$n = k + 1 \rightarrow \frac{(k+1) \cdot (2 \cdot (k+1)^2 + 3 \cdot (k+1) + 1)}{6} = \frac{k \cdot (2 \cdot k^2 + 3 \cdot k + 1)}{6} + (k + 1) \in \mathbb{N}$$