Тақырып: Арифметикалық орта мен геометриялық орта арасындағы теңсіздік.

Кез келген $a, b \geq 0$ сандары үшін

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab} \quad (AM - GM) \text{ теңсіздігі орындалады.}$$

Есептер:

1. Кез келген $x \geq 0$ үшін
$$1 + x \geq 2\sqrt{x}$$
теңсіздігі орындалатынын дәлелдеңіз.

2. $x, y \in \mathbb{R}^+$ үшін
$$2(x^2 + y^2) \geq (x + y)^2$$
теңсіздігі орындалатынын дәлелдеңіз.
3. Егер $a, b > 0$ болса, $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2$ орындалады.
4. $x, y, z \in \mathbb{R}$ үшін
$$x^2 + y^2 + z^2 \geq xy + yz + xz$$
теңсіздігі орындалатынын дәлелдеңіз.
5. $x, y, z \in \mathbb{R}$ үшін
$$x^2 + y^2 + z^2 \geq x\sqrt{y^2 + z^2} + y\sqrt{x^2 + z^2}$$
теңсіздігі орындалатынын дәлелдеңіз.

$AM - GM$ теңсіздігін көбірек сандарға да қолдануға болады. Мысалы $a, b, c, d \geq 0$ сандары үшін
$$\frac{a+b+c+d}{4} \geq \sqrt[4]{abcd}$$
теңсіздігі орындалады.

Есептер:

6. $x, y \in \mathbb{R}$ үшін
$$x^4 + y^4 + 8 \geq 8xy$$
орындалады.
7. $a, b, c, d \in \mathbb{R}^+$ үшін
$$(a + b + c + d)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d}\right) \geq 16$$
орындалады.

Теорема: ($AM - GM$ теңсіздігі). $a_1, a_2, \dots, a_n$ оң сандары үшін

$$\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n}$$

теңсіздігі орындалады.

Есептер:

8. $0 \leq x \leq 1$ үшін, $x(1 - x^3)$ өрнегінің ең үлкен мәнін табыңыз.
9. Егер $a, b, c > 0$ және $(1 + a)(1 + b)(1 + c) = 8$ болса, $abc \leq 1$ теңсіздігі орындалады.
   ::
10. Егер $a, b, c > 0$ және $abc = 1$ болса,
$$\frac{1 + ab}{1 + a} + \frac{1 + bc}{1 + b} + \frac{1 + ac}{1 + c} \geq 3.$$
11. $\frac{1}{1+x_1} + \cdots + \frac{1}{1+x_n} = 1$ болатындай $x_1, \dots, x_n$ оң сандары берілген.
$$x_1 x_2 \dots x_n \geq (n-1)^n$$
болатынын дәлелдеңіз.
12. $a + b + c = 1$ болатын, a, b, c оң сандары үшін
$$\left(\frac{1}{a} - 1\right)\left(\frac{1}{b} - 1\right)\left(\frac{1}{c} - 1\right) \geq 8$$
теңсіздігі орындалады.
13. $x, y, z \geq 0$ сандары үшін
$$\frac{(x + y + z)^2}{3} \geq x\sqrt{yz} + y\sqrt{zx} + z\sqrt{xy}$$
теңсіздігі орындалатынын дәлелдеңіз.

Үй жұмысы

1. $x > 0$ саны үшін $x + \frac{1}{x} \geq 2$ орындалатынын дәлелдеңіз.
2. $x, y \in \mathbb{R}^+$ үшін $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \geq \frac{4}{x+y}$ орындалатынын дәлелдеңіз.
3. $x, y, z \in \mathbb{R}^+$ үшін $(x+y)(y+z)(z+x) \geq 8xyz$ орындалатынын дәлелдеңіз.
4. $x, y \in \mathbb{R}$ үшін $x^2 + y^2 + 1 \geq xy + x + y$ орындалатынын дәлелдеңіз.
5. $x, y, z \in \mathbb{R}^+$ үшін $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \geq \frac{1}{\sqrt{xy}} + \frac{1}{\sqrt{yz}} + \frac{1}{\sqrt{zx}}$ орындалатынын дәлелдеңіз.
6. $x, y, z \in \mathbb{R}^+$ үшін $\frac{xy}{z} + \frac{yz}{x} + \frac{zx}{y} \geq x + y + z$ орындалатынын дәлелдеңіз.
7. $a, b, c, d \in \mathbb{R}^+$ үшін $\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{d} + \frac{d}{a} \geq 4$ орындалатынын дәлелдеңіз.
8. $x_1, \dots, x_n > 0$ үшін
$$(x_1 + x_2 + \cdots + x_n)\left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \cdots + \frac{1}{x_n}\right) \geq n^2$$
теңсіздігі орындалатынын дәлелдеңіз.
9. a, b, c оң сандары үшін $a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 \geq abc(a+b+c)$ теңсіздігін дәлелдеңіз.
10. a, b, c оң сандары үшін
$$(a^2b + b^2c + c^2a)(ab^2 + bc^2 + ca^2) \geq 9a^2b^2c^2$$
теңсіздігін дәлелдеңіз.
11. a, b, c оң сандар және $\frac{1}{1+a} + \frac{1}{1+b} + \frac{1}{1+c} = 1$ болса,
$$abc \geq 8$$
теңсіздігін дәлелдеңіз.