

Тақырып: Арифметикалық прогрессия

Арифметикалық прогрессия ұғымы

Анықтама. Егер $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ тізбегінің екінші мүшесінен бастап, әрбір мүшесі алдындағы көршілес мүшеге тұрақты санды қосқанға тең болса, онда бұл тізбекті **арифметикалық прогрессия** деп атайды.

Басқаша айтқанда, кез келген n натурал саны үшін

$$a_{n+1} = a_n + d$$

теңдігі орындалса, $\{a_n\}$ тізбегін арифметикалық прогрессия, d санын арифметикалық прогрессияның **айырымы** деп атайды.

Арифметикалық прогрессияның n – мүшесінің формуласы

$$a_n = a_1 + (n - 1)d,$$

$$a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}.$$

Арифметикалық прогрессияның алғашқы n мүшесінің қосындысы

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n) \cdot n}{2},$$

$$S_n = \frac{(2a_1 + (n - 1)d) \cdot n}{2}.$$

Сабақта талданылатын есептер.

1. Үшбұрыш қабырғалары арифметикалық прогрессияны құрайды. Ең үлкен қабырғаның ең кішкентай қабырғаға қатынасы 3 –тен кем екенін дәлелдеңіздер.
2. a, b және c оң сандары арифметикалық прогрессияны құрайды. $\frac{1}{\sqrt{b} + \sqrt{c}}$, $\frac{1}{\sqrt{a} + \sqrt{c}}$ және $\frac{1}{\sqrt{a} + \sqrt{b}}$ сандары да арифметикалық прогрессияны құрайтынын дәлелдеңіздер.
3. Барлық мүшелері 0 –ге тең болмайтын $a_1, a_2, \dots, a_n$ шектеулі арифметикалық прогрессия үшін

$$\frac{1}{a_1 a_2} + \frac{1}{a_2 a_3} + \dots + \frac{1}{a_{n-1} a_n} = \frac{n - 1}{a_1 a_n}$$

орындалатынын дәлелдеңіз.

4. $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ және $\sqrt{5}$ сандары бір арифметикалық прогрессияның мүшелері бола алады ма?
5. Арифметикалық прогрессияның бірінші мүшесі және айырымы – натурал сандар. Егер осы арифметикалық мүшенің бір мүшесі толық квадрат болса, онда бұл прогрессияның мүшелерінің арасында шексіз көп толық квадрат болатынын дәлелдеңіз.
6. Натурал сандардан тұратын кез келген арифметикалық прогрессияда цифрларының қосындысы бірдей болатын екі мүше табылатынын дәлелдеңіз.
7. Арифметикалық прогрессия бүтін сандардан тұрады. Алғашқы n мүшелерінің қосындысы 2-нің дәрежесі болса, n саны да 2-нің дәрежесі болатынын дәлелдеңіз.
8. Арифметикалық прогрессияның алғашқы n мүшелерінің қосындысы S_n –ге, ал алғашқы m мүшелерінің қосындысы S_m –ге тең ($n \neq m$). Алғашқы $n + m$ мүшелерінің қосындысын табыңыз.
9. Тек әртүрлі жай сандардан тұратын шексіз арифметикалық прогрессия бар ма?
10. Жүз натурал сан өспелі арифметикалық прогрессияны құрайды. Осы сандардың әрбір екеуі өзара жай болуы мүмкін бе?
11. 9 –ға бөлінетін сандар саны 8 –ге бөлінетін сандар санынан көбірек, бірақ 10 –ға бөлінетін сандардан азырақ болатын 2024 саннан тұратын арифметикалық прогрессия бар ма?

Үй жұмысы

1. Тікбұрышты үшбұрыштың қабырғаларының ұзындықтары арифметикалық прогрессия құра алады ма?
2. Айырымы $d \neq 0$ және барлық мүшелері 0 –ге тең болмайтын $a_1, a_2, \dots, a_n$ шектеулі арифметикалық прогрессия үшін

$$\frac{1}{a_1 a_2 a_3} + \frac{1}{a_2 a_3 a_4} + \dots + \frac{1}{a_{n-2} a_{n-1} a_n} = \frac{1}{2d} \left(\frac{1}{a_1 a_2} - \frac{1}{a_{n-1} a_n} \right)$$

орындалатынын дәлелдеңіз.

3. Барлық мүшелері оң болатын $a_1, a_2, \dots, a_n$ шектеулі арифметикалық прогрессия үшін

$$\frac{1}{\sqrt{a_1} + \sqrt{a_2}} + \frac{1}{\sqrt{a_2} + \sqrt{a_3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{a_{n-1}} + \sqrt{a_n}} = \frac{n-1}{\sqrt{a_1} + \sqrt{a_n}}$$

орындалатынын дәлелдеңіз.

4. p жай сан, $a_1, a_2, \dots, a_p$ бүтін сандары арифметикалық прогрессияны құрайды және олардың ешқайсысы p –ға бөлінбейді. Осы прогрессияның айырымы p –ға бөлінетінін дәлелдеңіз.
5. Егер n – натурал сан болса, $1, 1+n, 1+2n, \dots$ шексіз арифметикалық прогрессияда натурал санның кубы кездесетінін дәлелдеңіз.
6. $n \neq m$ натурал сандары үшін арифметикалық прогрессияның алғашқы n мүшелерінің қосындысы алғашқы m мүшелерінің қосындысына тең. Алғашқы $n+m$ мүшелерінің қосындысын табыңыз.
7. 2 –ге де, 3 –ке де бөлінбейтін барлық үштаңбалы сандардың қосындысын табыңыз.
8. $a_1 = a > 0$ және $k \geq 1$ үшін $a_{k+1} = \frac{a_k}{1+ka_k}$ болсын. a_n санын есептеңіз (a және n арқылы).
9. (p, q, r) –арифметикалық прогрессия, ал мүшелері 3 – тен артық және жай сандар. Прогрессияның айырымы 3 –ке бөлінетінін дәлелдеңіз.
10. Арифметикалық прогрессияның жүз мүшенің жартысынан көбі бүтін сандар. Осы прогрессияның барлық мүшелері міндетті түрде бүтін сандар ма?