

Тақырып: АМ-GM және Коши теңсіздіктері

Есептер:

1. Егер $a, b, c > 0$ болса,

$$\frac{a^3}{b} + \frac{b^3}{c} + \frac{c^3}{a} \geq ab + bc + ca$$

теңсіздігі орындалады.

2. Егер $a, b, c > 0$ болса,

$$\frac{a^5}{b^3} + \frac{b^5}{c^3} + \frac{c^5}{a^3} \geq a^2 + b^2 + c^2$$

3. (Облыстық олимпиада, 2009-2010 оқу жылы, 9 сынып) $a + b + c = x + y + z$ болатындай a, b, c – теріс емес нақты, x, y, z – оң нақты сандар болсын. Теңсіздікті дәлелдеңіздер:

$$\frac{a^3}{x^2} + \frac{b^3}{y^2} + \frac{c^3}{z^2} \geq a + b + c.$$

4. (Облыстық олимпиада, 2015-2016 оқу жылы, 9 сынып) Кез келген теріс емес нақты x, y, z сандары үшін

$$\sqrt{2x^2 + 3y^2 + 4z^2} + \sqrt{3x^2 + 4y^2 + 2z^2} + \sqrt{4x^2 + 2y^2 + 3z^2} \geq (\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z})^2$$

теңсіздігін дәлелдеңіз.

5. (Облыстық олимпиада, 2016-2017 оқу жылы, 9 сынып) Барлық оң a, b, c сандары үшін теңсіздікті дәлелдеңіз

$$\frac{a^2}{3a^2 + b^2 + 2ac} + \frac{b^2}{3b^2 + c^2 + 2ab} + \frac{c^2}{3c^2 + a^2 + 2bc} \leq \frac{1}{2}.$$

6. (Облыстық олимпиада, 2022-2023 оқу жылы, 9 сынып) Кез келген оң нақты a, b, c, d сандары үшін келесі теңсіздікті дәлелдеңіз:

$$\frac{1}{a + 2b + 3c + 4d} + \frac{1}{b + 2c + 3d + 4a} + \frac{1}{c + 2d + 3a + 4b} + \frac{1}{d + 2a + 3b + 4c} \leq \frac{1}{10a} + \frac{1}{10b} + \frac{1}{10c} + \frac{1}{10d}.$$

7. a, b, c оң сандар үшін келесі теңсіздік дәлелдеңіз:

$$\left(a^2 + \frac{3}{4}\right) \left(b^2 + \frac{3}{4}\right) \left(c^2 + \frac{3}{4}\right) \geq \sqrt{(a+b)(b+c)(c+a)}$$

8. (Республикалық олимпиада, 2011-2012 оқу жылы, 10 сынып). Берілген $x_1, x_2, \dots, x_n$ сандар үшін теңсіздікті дәлелдеңдер:

$$\frac{1}{1+x_1} + \dots + \frac{1}{1+x_n} \leq \frac{n}{1 + \frac{n}{\frac{1}{x_1} + \dots + \frac{1}{x_n}}}.$$

9. (IMO 1995) $abc = 1$ және a, b, c нақты оң сандары үшін теңсіздікті дәлелдеңіздер

$$\frac{1}{a^3(b+c)} + \frac{1}{b^3(c+a)} + \frac{1}{c^3(a+b)} \geq \frac{3}{2}.$$

Үй жұмысы

1. $a, b, c > 0$ сандары үшін

$$\frac{a^3}{b^2} + \frac{b^3}{c^2} + \frac{c^3}{a^2} \geq a + b + c.$$

2. $a, b, c > 0$ сандары үшін

$$\frac{a^3}{bc} + \frac{b^3}{ac} + \frac{c^3}{ab} \geq a + b + c.$$

3. $a, b, c > 0$ сандары үшін

$$\frac{a^3}{b} + \frac{b^3}{c} + \frac{c^3}{a} \geq ab + bc + ac.$$

4. (Облыстық олимпиада, 2017-2018 оқу жылы, 9 сынып)

Квадраттарының қосындысы 3-ке тең болатын a, b, c оң сандары үшін

$$5(a^4 + b^4 + c^4) + 9 \geq 8(a^3 + b^3 + c^3)$$

теңсіздігін дәлелдеңіз.

5. (Облыстық олимпиада, 2021-2022 оқу жылы, 9 сынып) a, b және c оң сандары үшін келесі теңсіздікті дәлелдеңіз

$$\sqrt{a^2 + 2b^2} + \sqrt{b^2 + 2c^2} + \sqrt{c^2 + 2a^2} \geq \sqrt{3}(a + b + c).$$

6. $a > b > c > d > 0$ сандары үшін

$$a + \frac{1}{(a-b)(b-c)(c-d)} \geq d + 4$$

орындалатынын дәлелдеңіз.

7. (АРМО 1991) $a_1 + \dots + a_n = b_1 + \dots + b_n$ болатындай $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n$ оң сандары берілген.

$$\frac{a_1^2}{a_1 + b_1} + \dots + \frac{a_n^2}{a_n + b_n} \geq \frac{1}{2}(a_1 + \dots + a_n)$$

теңсіздігін дәлелдеңіз.

8. a, b, c оң сандары үшін келесі теңсіздікті дәлелдеңіз

$$\frac{a}{b^2 + bc + c^2} + \frac{a}{b^2 + bc + c^2} + \frac{a}{b^2 + bc + c^2} \geq \frac{a + b + c}{ab + bc + ca}.$$

9. $x, y, z > 0$ сандары үшін

$$\frac{x^2 + y^2}{z + 1} + \frac{y^2 + z^2}{x + 1} + \frac{z^2 + x^2}{y + 1} \geq \frac{3}{2}(x + y + z - 1)$$

орындалатынын дәлелдеңіз.

10. Теріс емес нақты a, b, c сандары үшін

$$\frac{1}{2a+1} + \frac{1}{2b+1} + \frac{1}{2c+1} \geq 1$$

теңсіздігі орындалса, келесі теңсіздікті дәлелдеңіз:

$$\frac{1}{5a+1} + \frac{1}{5b+1} + \frac{1}{5c+1} \geq \frac{1}{2}.$$

11. (JBMO, 2023) Барлық оң нақты x, y, z сандары үшін

$$\frac{2x^2 - x + y + z}{x + y^2 + z^2} + \frac{2y^2 + x - y + z}{x^2 + y + z^2} + \frac{2z^2 + x + y - z}{x^2 + y^2 + z} \geq 3$$

теңсіздігін дәлелдеңіз.

maxmath.kz