

Қалдықтар теориясы

1. а) $(2^{41} + 1) : 83$;
ә) $(2^{70} + 3^{70}) : 13$ болатынын дәлелдеңіз.
2. m натурал саны берілсін. Егер $M = \{0, 3, 6, \dots, 3m - 3\}$ модуль m бойынша қалдықтардың толық жүйесі болса, онда $(m, 3) = 1$ болатынын дәлелдеңіз.
3. Модуль 5 және 6 бойынша көбейту кестесін құрыңыз.
4. Келесі теңдеулерді шешіңіз:
а) $4x \equiv 9 \pmod{13}$;
ә) $3x \equiv 12 \pmod{15}$;
б) $20x \equiv 30 \pmod{55}$.

Өзіндік тапсырма

1. $k = 1, 2, 3, 4, 5$ үшін $6^k + 1 \pmod{17}$ қалдығын табыңыз.
2. а) m тақ саны берілсін. Онда $\{0, 2, 4, \dots, 2m - 2\}$ модуль m бойынша қалдықтардың толық жүйесі екенін дәлелдеңіз.
ә) $(m, k) = 1$ болсын. Онда $\{0, k, 2k, \dots, (m - 1)k\}$ модуль m бойынша қалдықтардың толық жүйесі екенін дәлелдеңіз.
б) $(m, k) = 1$ және r кез келген натурал сан болсын. Онда $\{r, k + r, 2k + r, \dots, (m - 1)k + r\}$ модуль m бойынша қалдықтардың толық жүйесі екенін дәлелдеңіз.
3. а) $(7^{2014} + 9^{2014}) : 17$;
ә) $((3^n - 1)^n - 4) : (3^n - 4)$;
б) $(2^{5n+1} + 5^{n+2}) : 27$ екенін дәлелдеңіз.
4. Кез келген натурал n үшін $3^n + 5^n$ ешқашан санның квадраты бола алмайтынын дәлелдеңіз.
5. $a_1 = a_2 = 1$ және $a_{n+2} = a_n a_{n+1} + 1$ шарттарын қанағатандыратын $\{a_n\}$ тізбегі берілсін. $n > 6$ үшін $a_n - 3$ құрама сан екенін дәлелдеңіз.
6. Егер $(x^2 + y^2) : 21$ болса, онда $(x^2 + y^2) : 441$ екенін дәлелдеңіз.
7. Теңдеулер жүйесін шешіңіз
$$\begin{cases} 6x + 5y \equiv 1 \pmod{11}, \\ 4x + 3y \equiv 2 \pmod{11}. \end{cases}$$
8. p жай сан болсын. Онда а) $(p - 1)! \equiv -1 \pmod{p}$;
ә) $(p - 2)! \equiv 1 \pmod{p}$ болатынын дәлелдеңіз.
б) Егер $(n - 2)! \equiv 1 \pmod{n}$ болса, онда n жай сан екенін дәлелдеңіз.
9. $k \geq 3$ болсын. $x^2 \equiv 1 \pmod{2^k}$ теңдеуінің барлық шешімін табыңыз.
10. m жұп саны берілсін. Егер $\{a_1, a_2, \dots, a_m\}$ және $\{b_1, b_2, \dots, b_m\}$ модуль m бойынша қалдықтардың толық жүйесі болса, онда $\{a_1 + b_1, a_2 +$

$b_2, \dots, a_m + b_m$ модуль t бойынша қалдықтардың толық жүйесі болмайтынын дәлелдеңіз.