

Тақырып: Теңдеулер жүйесі

Теңдеулер жүйесін келесі түрде жазуға болады:

$$\begin{cases} f_1(x_1, \dots, x_m) = 0, \\ \dots \\ f_n(x_1, \dots, x_m) = 0. \end{cases}$$

Есептер:

1. Теңдеулер жүйесін шешіңіз:

$$\begin{cases} xy = 1, \\ yz = 2, \\ zx = 8. \end{cases}$$
2. Теңдеулер жүйесін шешіңіз:

$$\begin{cases} xy(x + y) = 30, \\ x^3 + y^3 = 35. \end{cases}$$
3. Теңдеулер жүйесін шешіңіз:

$$\begin{cases} (x + y)^3 = z, \\ (y + z)^3 = x, \\ (z + x)^3 = y. \end{cases}$$
4. Теңдеулер жүйесін шешіңіз:

$$\begin{cases} x + y + xy = 19, \\ y + z + yz = 11, \\ z + x + zx = 14. \end{cases}$$
5. Теңдеулер жүйесін шешіңіз:

$$\begin{cases} x + \frac{3x - y}{x^2 + y^2} = 3, \\ y - \frac{x + 3y}{x^2 + y^2} = 0. \end{cases}$$
6. Теңдеулер жүйесін шешіңіз:

$$\begin{cases} x^4 + y^4 = 17, \\ x + y = 3. \end{cases}$$
7. Теңдеулер жүйесін шешіңіз:

$$\begin{cases} x + y + z = a, \\ x^2 + y^2 + z^2 = a^2, \\ x^3 + y^3 + z^3 = a^3. \end{cases}$$
8. Теңдеулер жүйесін шешіңіз:

$$\begin{cases} x + y = 2, \\ xy - z^2 = 1. \end{cases}$$
9. Теңдеулер жүйесін шешіңіз:

$$\begin{cases} (x_3 + x_4 + x_5)^5 = 3x_1, \\ (x_4 + x_5 + x_1)^5 = 3x_2, \\ (x_5 + x_1 + x_2)^5 = 3x_3, \\ (x_1 + x_2 + x_3)^5 = 3x_4, \\ (x_2 + x_3 + x_4)^5 = 3x_5. \end{cases}$$

10. Теңдеулер жүйесін оң сандарда шешіңіз:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = x_3^2, \\ x_2 + x_3 = x_4^2, \\ x_3 + x_4 = x_5^2, \\ x_4 + x_5 = x_1^2, \\ x_5 + x_1 = x_2^2. \end{cases}$$

11. (Облыстық олимпиада, 2013-2014 оқу жылы, 9 сынып). Егер a, b, c – үшбұрыш қабырғаларының ұзындықтарына тең болса, онда

$$\begin{cases} a(yz + x) = b(zx + y) = c(xy + z), \\ x + y + z = 1, \end{cases}$$

жүйесінің x, y, z оң сандар жиынында шешімі бар екенін дәлелдеңіз.

12. Теңдеулер жүйесін шешіңіз:

$$\begin{cases} \left(x^2 + x + \frac{1}{2}\right)\left(y^2 - y + \frac{1}{2}\right) = z^2 \\ \left(y^2 + y + \frac{1}{2}\right)\left(z^2 - z + \frac{1}{2}\right) = x^2 \\ \left(z^2 + z + \frac{1}{2}\right)\left(x^2 - x + \frac{1}{2}\right) = y^2. \end{cases}$$

13. (IMO 1966) Жүйені шешіңіз:

$$\begin{cases} |a_1 - a_2|x_2 + |a_1 - a_3|x_3 + |a_1 - a_4|x_4 = 1, \\ |a_2 - a_1|x_1 + |a_2 - a_3|x_3 + |a_2 - a_4|x_4 = 1, \\ |a_3 - a_1|x_1 + |a_3 - a_2|x_2 + |a_3 - a_4|x_4 = 1, \\ |a_4 - a_1|x_1 + |a_4 - a_2|x_2 + |a_4 - a_3|x_3 = 1, \end{cases}$$

мұндағы a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 – берілген әртүрлі нақты сандар.

Үй жұмысы

1. Теңдеулер

жүйесін

шешіңіз:

$$\begin{cases} x(y+z) = 35, \\ y(x+z) = 32, \\ z(x+y) = 27. \end{cases}$$

2. Теңдеулер жүйесін шешіңіз:

$$\begin{cases} x^3 + x^3y^3 + y^3 = 17, \\ x + xy + y = 5. \end{cases}$$

3. Теңдеулер жүйесін шешіңіз:

$$\begin{cases} \frac{1}{x} = y + z, \\ \frac{1}{y} = z + x, \\ \frac{1}{z} = x + y. \end{cases}$$

4. $xyz \neq 0$ үшін жүйені шешіңіз:

$$\begin{cases} x^2(y^2 + z^2 - x^2) = 3xyz, \\ y^2(x^2 + z^2 - y^2) = -21xyz, \\ z^2(x^2 + y^2 - z^2) = 3xyz. \end{cases}$$

5. Теңдеулер жүйесін шешіңіз:

$$\begin{cases} x^3 - y = 6, \\ y^3 - z = 6, \\ z^3 - x = 6. \end{cases}$$

6. Теңдеулер жүйесін шешіңіз:

$$\begin{cases} \frac{2x_1^2}{1+x_1^2} = x_2, \\ \frac{2x_2^2}{1+x_2^2} = x_3, \\ \frac{2x_3^2}{1+x_3^2} = x_1. \end{cases}$$

7. Теңдеулер жүйесін шешіңіз:

$$\begin{cases} x_1x_2 = 1, \\ x_2x_3 = 1, \\ \dots \\ x_{n-1}x_n = 1, \\ x_nx_1 = 1. \end{cases}$$

8. (Савин турнирі) a, b, c, d нақты сандар үшін

$$\begin{cases} \frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{d} + \frac{d}{a} = 6, \\ \frac{a}{c} + \frac{b}{d} + \frac{c}{a} + \frac{d}{b} = 8 \end{cases}$$

орындалады. $\frac{a}{b} + \frac{c}{d}$ өрнегінің барлық мүмкін мәндерін табыңыз.

9. (Савин турнирі) Теңдеулер жүйесін шешіңіз:

$$\begin{cases} a = \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d}, \\ b = \frac{1}{c} + \frac{1}{d} + \frac{1}{a}, \\ c = \frac{1}{d} + \frac{1}{a} + \frac{1}{b}, \\ d = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}. \end{cases}$$