

2018-2019 және 2019-2020 жылғы аудандық кезең

Мысал 1. Теңбүйірлі ABC үшбұрышында $AB=AC$ және $\angle B = 36^\circ$. Егер B төбесінен түсірілген биссектрисаның ұзындығы 10 болса, A төбесінен түсірілген биіктіктің ұзындығын табыңыз.

Мысал 2. $n^4 - 2n^3 + 23n^2 - 22n + 16$ санын толық квадрат ететін n натурал сандарының бәрін табыңыз.

Мысал 3. 100 оқушы қатысқан «Жібек Жолы» олимпиадасында төрт есеп берілді. 1-есепті 90 оқушы, 2-есепті 80 оқушы, 3-есепті 70 оқушы, 4-есепті 60 оқушы шығарды. Ешбір оқушы төрт есептің бәрін шығара алмады. Неше оқушы дәл үш есептен шығарды? Жауабыңызды негіздеңіз.

Мысал 4. Кез келген оң нақты x саны үшін $2^{\sqrt[12]{x}} + 2^{\sqrt[4]{x}} \geq 2 \cdot 2^{\sqrt[6]{x}}$ теңсіздігі орындалатынын дәлелдеңіз.

Мысал 5. Сүйірбұрышты ABC үшбұрышына іштей сызылған шеңбердің центрі O болсын. Егер AOB , BOC , COA үшбұрыштарына іштей сызылған шеңберлердің радиустары өзара тең болса, ABC үшбұрышының дұрыс екенін дәлелдеңіз.

Мысал 6. Бір елде N қала бар. Әрбір екі қала тіке қатынас жолмен, ұшақпен, немесе кемемен жалғасқан. Транспорттың қандай да бір түрін таңдап, осы елдің кез келген қаласынан кез келген қаласына (мүмкін, ауысып отыру арқылы) тек осы транспортты пайдаланып жетуге болатынын дәлелдеңіз.

Үй жұмысы

1. Бізге 1, 3 және 5 цифрларын қолданып жазылған 2019 таңбалы сан берілген. Осы санның бөлгішінің соңғы цифры 7 болса, біз оны *көңілді* деп атаймыз. Санның бөлгіштерінің жартысынан кемі көңілді болатынын дәлелдеңіз.
2. ABC үшбұрышының ішінен P нүктесі таңдап алынған. Егер PAB , PBC , PCA үшбұрыштарына сырттай сызылған шеңберлердің радиустары өзара тең болса, P нүктесі ABC үшбұрышының ортоцентрі екенін дәлелдеңіз.
3. $abc = 2$ шартын қанағаттандыратын кез келген оң нақты a , b , c сандары үшін $a^3 + b^3 + c^3 \geq a\sqrt{(b+c)} + b\sqrt{(c+a)} + c\sqrt{(a+b)}$ теңсіздігін дәлелдеңіз.
4. Натурал a , b , c және d сандарының $ab = cd$ теңдігін қанағаттандыратыны белгілі болса, $a^2 + b^2 + c^2 + d^2$ санының құрама болатынын дәлелдендер.
5. Біз $|a_1 - a_2|$, $|a_2 - a_3|$, ..., $|a_8 - a_9|$, $|a_9 - a_1|$ сандары түгелдей әртүрлі болатындай етіп, $\{1, 2, \dots, 9, 10\}$ жиынынан әртүрлі $a_1, a_2, \dots, a_9$ сандарын таңдай аламыз ба?
6. ABC үшбұрышының AN биіктігі мен BE биссектрисасы жүргізілген. Егер $\angle BEA = 45^\circ$ болса, онда $\angle ENC = 45^\circ$ болатынын дәлелдеңіз.