

Инвариант – 2

Анықтама: Инвариант ретінде тек сандар қосындысының қалдығын ғана емес, басқа да алгебралық өрнектерді қарастыруға болады.

Мысал 1: Үстелде алты стакан бар. Олардың ішінде бес стакан дұрыс, ал біреуі төңкеріліп тұр. Бізге кез келген екі стаканды аударуға рұқсат етілген. Осы әрекет арқылы барлық стаканды дұрыс қоюға болады ма?

Мысал 2: Шеңбер алты секторға бөлінген және сол секторларда 0, 1, 2, 0, 2, 1 сандары жазылған (осы ретпен). Бір жүрісте кез келген екі көрші тұрған сандарға бірдей санды қосуға рұқсат етілген. Бірнеше жүрістен кейін барлық секторда бірдей сан бола алады ма?

Мысал 3: Тақтада 1, 2, ..., 20 сандары жазылған. Тақтадағы кез келген екі a , b сандарын өшіріп, орнына $a + b - 1$ саның жазса болады. Осындай 19 операциядан кейін тақтада қандай сан қалады?

Мысал 4: Тақтада 1, 2, ..., 20 сандары жазылған. Тақтадағы кез келген екі a , b сандарын өшіріп, орнына $ab + a + b$ саның жазса болады. Осындай 19 операциядан кейін тақтада қандай сан қалады?

Анықтама: Полуинвариант – кейбір түрлендіру кезінде тұрақты өзгеріп тұратын шама (әрдайым өседі немесе азаяды).

Мысал 5: Саяхатшы А қаласынан ең алыс орналасқан Б қаласына барды. Кейін сол қаладан ең алыс орналасқан В қаласына аттанды және А мен В бөлек қалалар екен. Солай әр қаладан өзінен алыс орналасқан қалаға жүре беріп, қайтадан ең бастапқы А қаласына қайтып келмейтінің дәлелдеңіз.

Мысал 6: 99×99 таблицаның клеткаларында бүтін сандар жазылған. Егер кейбір қатарда немесе бағанда сандардың қосындысы теріс болса, онда сол қатарда немесе бағанда орналасқан сандардың белгісін қарама-қарсыға өзгертуге болады. Осындай операцияны шексіз істей берсе болады ма?

Мысал 7: Тақтада бірнеше сандар жазылған. Бір жүрісте екеуіде нөлге тең емес кез келген екі a , b сандарын $a - \frac{b}{2}$ және $b + \frac{a}{2}$ сандарымен ауыстыруға рұқсат етіледі. Бірнеше жүрістен кейін қайтып бастапқыда жазылған сандарға орала аламыз ба?

Үй жұмысы. Инвариант – 2.

1. Әр секунд сайын a , b , c сандары $b + c$, $c + a$, $a + b$ сандарына ауыстырылады. Егер басында 1, 2, 3 сандары болса, бірнеше уақыттан кейін 1001, 1002, 1003 сандарын алуға болады ма?
2. Қатарда 10, 5, 7, 4, 8 сандары осы ретпен жазылған. Кез келген көрші тұрған екі a , b сандарын $a + 1$, $b - 1$ сандарына алмастырса болады. Осы операцияның көмегімен қатарда осы сандардың 9, 7, 5, 3, 10 жазылуы мүмкін бе?
3. Дөңес төрт бұрыштың төбелерінде 8, 3, 12, 1 сандары жазылған (осы ретпен). Бір жүрісте кез келген екі көрші төбелерде жазылған сандарға бірдей санды қосуға рұқсат етілген. Бірнеше жүрістен кейін төбелерде 10, 3, 9, 5 сандары жазылуы мүмкін бе?
4. Қандай да бір үш сан берілген. Кез келген екі санға келесі операцияны істесе болады: егер ол сандар a , b болса, оларды $\frac{a+b}{\sqrt{2}}$, $\frac{a-b}{\sqrt{2}}$ сандарына алмастырса болады. Осы операцияның көмегімен $(2, \sqrt{2}, \frac{1}{\sqrt{2}})$ үштігінен $(1, \sqrt{2}, 1 + \sqrt{2})$ үштігін алуға болады ма?
5. Тақтада 1 және 2 саны жазылған. Келесі ереже бойынша тақтаға жаңа сандар жазуға болады: егер тақтада a , b сандары бар болса, тақтаға $ab + a + b$ санын жазса болады. Бірнеше уақыттан кейін тақтада 12131 саны жазылуы мүмкін бе?
6. Шеңбер бойымен бірнеше сандар жазылған. Егер қатар тұрған кез келген төрт a , b , c , d сандары үшін $a - d$ және $b - c$ сандарының көбейтіндісі теріс болса, онда b және c сандарын ауыстыруға болады. Мұндай операцияларды шексіз жасау мүмкін емес екенің дәлелдеңіз.