

Тақырып: Геометриялық прогрессия

Геометриялық прогрессия ұғымы

Анықтама. Егер $\{a_n\}$ тізбегінің екінші мүшесінен бастап, әрбір мүшесі алдындағы көршілес мүшені тұрақты, нөлден өзгеше санға көбейткенде шықса, бұл тізбекті **геометриялық прогрессия** деп атайды.

Басқаша айтқанда, егер кез келген натурал n саны үшін

$$a_{n+1} = a_n \cdot q, q \neq 0, a_1 \neq 0$$

теңдігі орындалсы, $\{a_n\}$ тізбегін геометриялық прогрессия, q санын оның **еселігі** деп атайды.

Геометриялық прогрессияның n — мүшесінің формуласы.

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1},$$

$$a_n^2 = \sqrt{a_{n-1} \cdot a_{n+1}}.$$

Геометриялық прогрессияның алғашқы n мүшесінің қосындысы

$$S_n = \frac{a_1(1 - q^n)}{1 - q}.$$

Шексіз кемімелі геометриялық прогрессия мүшелерінің қосындысы

Анықтама. $|q| < 1$ болғанда

$$b, b \cdot q, b \cdot q^2, \dots, b \cdot q^{n-1}, \dots$$

сан тізбегін **шексіз кемімелі геометриялық прогрессия** деп атайды.

$$S = \frac{b}{1 - q}.$$

Есептер:

- Егер геометриялық прогрессияның $(n + 1)$ — ші мүшесі b —ға тең болса, геометриялық прогрессияның алғашқы $2n + 1$ мүшесінің көбейтіндісін табыңыз.
 - Өспелі геометриялық прогрессияның алғашқы 10 мүшесі – бүтін сандар. Қалған барлық мүшелері бүтін емес болу мүмкін бе?
 - Мүшелері 8,18 және 27 сандарын қамтитын геометриялық прогрессия бар ма?
 - $x \neq 1$ болса, келесі қосындыны табыңыз
- $$1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \dots + (n + 1)x^n.$$
- $2^n - 1 = P$ – жай сан. $N = 2^{n-1}P$ санының бөлшектерінің (N санынан өзгеше) қосындысы N — ге тең екенін дәлелдеңіз.

6. Бірдей ретпен жазылған үш сан арифметикалық және геометриялық прогрессияны құрайды. Осы сандар міндетті түрде тең болуы керек пе?
7. (Мәскеу математикалық олимпиадасы, 2001 жыл, 11 сынып)
Геометриялық прогрессияның бірінші, оныншы және отызыншы мүшелері – натурал сандар. Берілген прогрессияның жиырмамыншы мүшесі натурал сан болатыны рас па?
8. (Бүкілресейлік олимпиада, 1994-1995 оқу жылы, 11 сынып).
 $1, 2, \dots, 100$ сандардың барлығы 12 геометриялық прогрессияның мүшелері болу мүмкін бе?

Үй жұмысы

1. Тікбұрышты үшбұрыштың қабырғаларының ұзындықтары геометриялық прогрессия құра алады ма?
2. Мүшелері 1, 2 және 3 сандарын қамтитын геометриялық прогрессия бар ма?
3. $1 + 11 + 111 + \dots + \underbrace{11 \dots 1}_{n \text{ рет}}$ қосындысын табыңыз.
4. Әртүрлі a, b және c сандары берілген ретте геометриялық прогрессияны, ал $a + b, b + c$ және $c + a$ сандары арифметикалық прогрессияны құрайды. Геометриялық прогрессияның еселігін табыңыз.
5. Арифметикалық прогрессияның бірінші мүшесі 1-ге тең, ал айырымы – d натурал саны. Осы прогрессияның кейбір мүшелерінен шексіз геометриялық прогрессия құруға болатынын дәлелдеңіз.
6. (Математика мұғалімдерінің Халықаралық шығармашылық байқауы, 2021 жыл) (a_n) арифметикалық прогрессиясында алғашқы мүшесі a_1 және осы прогрессияның айырмасы d , ал (b_n) геометриялық прогрессиясында алғашқы мүшесі b_1 және осы прогрессияның еселігі q екені белгілі болса, онда $a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n$ қосындысын a_1, b_1, d, q және n арқылы өрнектеңіз.
7. (Мәскеу математикалық олимпиадасы, 2023 жыл, 11 сынып) Мұғалім тақтаға қалаған сандарын жаза алады. Сол сандардың ішінен геометриялық прогрессияның 5 тізбектес мүшесі және де арифметикалық прогрессияның 5 тізбектес мүшелерін таңдай алатындай кем дегенде қанша сан жазу керек?