

Тақырып: Коши теңсіздігі және Титу леммасы.

Теорема. (Коши-Буняковский-Шварц теңсіздігі) Кез келген $a_1, a_2, \dots, a_n, b_1, b_2, \dots, b_n$ сандары үшін

$$\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2} \cdot \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_n^2} \geq |a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n|$$

теңсіздігі орындалады. Теңдік $\frac{b_1}{a_1} = \frac{b_2}{a_2} = \dots = \frac{b_n}{a_n}$ болған жағдайда орындалады (a_i саны 0-ге тек $b_i = 0$ болған кезде тең болады).

Коши-Буняковский-Шварц теңсіздігі (КБШ теңсіздігі) келесі түрде де кездеседі:

$$(a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_n^2) \geq (a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n)^2$$

Есептер:

1. Кез келген $x, y, z \geq 0$ сандары үшін

$$(x^3 + y^3 + z^3)(x + y + z) \geq (x^2 + y^2 + z^2)^2$$

орындалатынын дәлелдеңіз.

2. Кез келген $a, b, c, d \geq 0$ сандары үшін

$$\sqrt{(a+c)(b+d)} \geq \sqrt{ab} + \sqrt{cd}$$

орындалатынын дәлелдеңіз.

3. $a_1, a_2, \dots, a_n, b_1, b_2, \dots, b_n > 0$ сандары үшін

$$(a_1 b_1 + \dots + a_n b_n) \left(\frac{a_1}{b_1} + \dots + \frac{a_n}{b_n} \right) \geq (a_1 + \dots + a_n)^2$$

орындалады.

4. Кез келген x саны үшін

$$|3\sin x - 4\cos x| \leq 5$$

орындалады.

5. Кез келген $x_1, \dots, x_n$ сандары үшін

$$x_1 x_2 + x_2 x_3 + \dots + x_n x_1 \leq x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2$$

орындалады.

Титу леммасы. Кез келген $a_1, a_2, \dots, a_n \geq 0$ және $b_1, b_2, \dots, b_n > 0$ сандары үшін

$$\frac{a_1^2}{b_1} + \frac{a_2^2}{b_2} + \dots + \frac{a_n^2}{b_n} \geq \frac{(a_1 + a_2 + \dots + a_n)^2}{b_1 + b_2 + \dots + b_n}$$

орындалады.

Есептер:

6. (Несбит теңсіздігі) $a, b, c > 0$ үшін

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2}$$

теңсіздігі орындалады.

7. x, y, z оң сандары үшін

$$\frac{(x+y+z)^2}{x^2+y^2+z^2} \leq \frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x}$$

орындалады.

8. $x, y, z > 0$ және $xyz = 1$ үшін

$$\frac{x^2}{y+z} + \frac{y^2}{x+z} + \frac{z^2}{x+y} \geq \frac{3}{2}$$

орындалады.

9. $a, b, c, d > 0$ болса,

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+d} + \frac{c}{d+a} + \frac{d}{a+b} \geq 2.$$

Үй жұмысы

1. Кез келген a, b үшін

$$1 + ab \leq \sqrt{1 + a^2} \cdot \sqrt{1 + b^2}$$

2. $(a^2 + b^2)(a^4 + b^4) \geq (a^3 + b^3)^2$ теңсіздігі кез келген a, b сандары үшін орындалатынын дәлелдеңіз.

3. $\sin x \sin y \sin z + \cos x \cos y \cos z \leq 1$ кез келген x үшін орындалатынын дәлелдеңіз.

4. $a_1, a_2, \dots, a_n, b_1, b_2, \dots, b_n, c_1, c_2, \dots, c_n > 0$ сандары үшін

$$(\sqrt{a_1 b_1} + \dots + \sqrt{a_n b_n})^2 \leq (a_1 c_1 + \dots + a_n c_n) \left(\frac{b_1}{c_1} + \dots + \frac{b_n}{c_n} \right).$$

5. $\sqrt{(a_1 - b_1)^2 + \dots + (a_n - b_n)^2} \leq \sqrt{a_1^2 + \dots + a_n^2} + \sqrt{b_1^2 + \dots + b_n^2}$

теңсіздігі кез келген $a_1, a_2, \dots, a_n, b_1, b_2, \dots, b_n$ сандары үшін орындалатынын дәлелдеңіз.

6. $(a^2 + b^2)(b^2 + c^2)(c^2 + d^2)(d^2 + a^2) \geq (ab + cd)(ad + bc)(ac + bd)^2$ кез келген a, b, c, d сандары үшін орындалатынын дәлелдеңіз.

7. $x, y, z > 0$ сандары үшін

$$\frac{x}{2y + z} + \frac{y}{2z + x} + \frac{z}{2x + y} \geq 1.$$

8. $a, b, c, d > 0$ сандары үшін

$$\frac{a}{b + 2c + d} + \frac{b}{c + 2d + a} + \frac{c}{d + 2a + b} + \frac{d}{a + 2b + c} \geq 1$$

теңсіздігі орындалады.

9. $a, b, c, d > 0$ сандары үшін

$$\frac{a^2}{b(a + c)} + \frac{b^2}{c(b + d)} + \frac{c^2}{d(c + a)} + \frac{d^2}{a(d + b)} \geq 2$$

теңсіздігі орындалады.

10. $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 > 0$ сандары үшін

$$\frac{x_1}{x_2 + x_3} + \frac{x_2}{x_3 + x_4} + \frac{x_3}{x_4 + x_5} + \frac{x_4}{x_5 + x_1} + \frac{x_5}{x_1 + x_2} \geq \frac{5}{2}.$$