

Комбинаторикадағы индукция

Анықтама. Көптеген комбинаторикалық есептерді индукцияның көмегімен шығаруға болады.

Мысал 1. Бірнеше түзу жазықты бөліктерге бөледі. Көршілес бөліктер әртүрлі түсті болатындай, барлық бөліктерді екі түске бояуға болатынын дәлелдеңіз.

Мысал 2. "Ханой мұнарасы" басқатырғысы үш қазықтың бірінде өлшемдері азая түсетін ретпен тізілген сегіз дисктен тұрады. Әр жолы тек бір дискіні ауыстыра отырып, және үлкен дискіні кіші дискінің үстіне қоймай, бүкіл мұнараны басқа қазыққа көшіру қажет. Басқатырғының шешімі бар екенін дәлелдеңіз.

Мысал 3. n қарақшы олжаны бөліседі. Олардың әрқайсысының әрбір бөліктің құндылығы туралы өз пікірі бар және әрқайсысы олжаның кем дегенде $\frac{1}{n}$ бөлігін алғысы келеді (өз көзқарасы бойынша). Олжаны әрбір қарақшы риза болатындай қалай бөлуге болады?

Мысал 4. Сыныпта әрбір сөзшең оқушы кем дегенде бір үнсіз оқушымен дос. Егер сыныпта сөзшең оқушының досы болып табылатын үнсіз оқушылардың саны тақ болса, ол үнсіз отырады. Мұғалім барлық сөзшең оқушылар үнсіз қалатындай етіп, сыныптың кем дегенде жартысын қосымша сабаққа шақыра алатынын дәлелдеңіз.

Мысал 5. Қандай $n > 3$ үшін массалары 1, 2, 3, ..., n грамм болатын гирь жиынтығын массалары тең үш үйіндіге бөлуге болады?

Мысал 6. 64×64 квадраттың бір клеткасын қиып тастаған. Қалған бөлікті үш клеткалы бұрыштарға бөлуге болатынын дәлелдеңіз.

Комбинаторикадағы индукция.

Үй жұмысы.

1. $3 \times n$ тікбұрышында үш түсті фишкалар тұр, әр түстен n дана. Әр бағанда барлық түстегі фишкалар кездесетіндей, әр жолдағы фишкаларды қайта орналастыруға болатынын дәлелдеңіз.
2. n адам бір-бірімен таныс емес. Кейбіреулерін таныстырып, ешбір үш адамның таныстарының саны бірдей болмауын қамтамасыз ету керек. Мұны кез келген n үшін жасауға болатынын дәлелдеңіз.
3. Дөңес көпбұрыштың төбелері үш түске боялған, әр түс бар және ешбір екі көршілес төбе бірдей түске боялмаған. Көпбұрышты әрбір үшбұрыштың төбелері үш түрлі түсті болатындай етіп диагональдармен үшбұрыштарға бөлуге болатынын дәлелдеңіз.
4. Шеңберлік автожолда бірнеше бірдей автокөлік тұр. Егер барлық бензинді бір автокөлікке құйса, бұл автокөлік бүкіл шеңберді айналып шығып, бастапқы орнына қайта оралар еді. Осы машиналардың кем дегенде біреуі жол жөнекей өткен машиналардың бензинін алып, бүкіл шеңберді айнала алатынын дәлелдеңіз.
5. 100 тастан тұратын үйінді бар. Екі адам келесі ойынды ойнайды. Бірінші ойыншы 1 тас алады, содан кейін екінші ойыншы 1 немесе 2 тас алады, содан кейін бірінші ойыншы 1, 2 немесе 3 тас алады, содан кейін екінші 1, 2, 3 немесе 4 тас алады және т.б. Соңғы тасты алған адам жеңеді. Қарсылас қалай ойнаса да, кім әрдайым жеңе алады?
6. Натурал сандардан әрбір келесі саны алдыңғысының квадратынан үлкен болатын және соңғы саны 2024-ке тең реттіліктер құрастырылды (реттіліктердің ұзындықтары әртүрлі болуы мүмкін). Мұндай реттіліктердің саны 2024-тен аз екенін дәлелдеңіз.