

Екі тәсілмен есептеу

Анықтама. Олимпиадалық есептерде қандай да бір шаманы екі жолмен есептеу жиі көмектеседі. Кейде бір шаманы екі түрлі жолмен есептеп, керек теңсіздікті алуға болады.

Мысал 1. 5×5 кестеде әр жолдағы сандардың қосындысы оң, ал әр бағанда теріс болатындай етіп кестенің әрбір клеткасына санды қоюға болады ма?

Мысал 2. Сыныпта 27 оқушы бар. Әрбір ұл 4 қызбен дос және әрбір қыз 5 ұлмен дос. Сыныпта неше ұл және неше қыз бар?

Мысал 3. Геометриялық прогрессияның қосындысын табыңыз $S_n = 1 + 3 + 9 + \dots + 3^n$.

Мысал 4. Белгілі бір комитетте әрбір мүше дәл үш кіші комитетке кіреді, ал әрбір кіші комитеттің дәл үш мүшесі бар. Мүшелер саны кіші комитеттер санына тең екенін дәлелдеңіз.

Мысал 5. Математикалық олимпиадаға екі жүз оқушы қатысты. Олимпиадада барлығы 6 есеп болды. Әрбір есепті кем дегенде 120 оқушы дұрыс шешкені белгілі. Әрбір есепті осы екі оқушының кем дегенде біреуі шығарған болатындай екі оқушы табылатынын дәлелдеңіз.

Мысал 6. Байқауда a қатысушыл мен b төреші қатысты, мұндағы $b \geq 3b$ тақ бүтін сан. Әр төреші әр қатысушыны "өтті" немесе "өтпеді" деп бағалайды. Қандай да бір k үшін кез-келген екі төреші ең көп дегенде k қатысушыға бірдей баға берді.

$\frac{k}{a} \geq \frac{b-1}{2b}$ екенін дәлелдеңіз.

Үй жұмысы

1. $M \times K$ тікбұрышты кестенің әрбір клеткасында сан жазылған. Әр қатардағы және әр бағандағы сандардың қосындысы 1-ге тең. $M = K$ екенін дәлелдеңіз.
2. Шеңбер бойымен қызыл және көк сандар орналастырылған. Әрбір қызыл сан көрші сандардың қосындысына тең, ал әрбір көк сан көрші сандардың жарты қосындысына тең. Қызыл сандардың қосындысы нөлге тең екенін дәлелдеңіз.
3. Шахмат тақтасында бір бірін ұрмайтындай 8 ладья орналасқан. Қара түсті клеткаларда орналасқан ладьялар саны жұп екенін дәлелдеңіз.
4. Келесі шартты қанағаттандыратындай 12 адамнан тұратын кез-келген топтан екеуін, ал қалған 10 адамнан тағы бесеуін таңдауға болатындығын дәлелдеңіз: осы 5 адамның әрқайсысы таңдалған екі адамның екеуімен де бірдей дос немесе бірдей дос емес.
5. Думада 1600 депутат бар, олар 80 адамнан тұратын 16000 комитет құрған. Ең аз дегенде төрт ортақ мүшесі бар екі комитет табылатынын дәлелдеңіз.
6. n және k натурал сандар болсын және S жазықтықтағы n нүктеден тұратын жиын болсын.
 - i) S жиынындағы ешбір үш нүкте бір түзудің бойында жатпайды, және
 - ii) S жиынындағы әрбір P нүктесі үшін S жиынындағы кемінде k нүкте P нүктесінен бірдей қашықтықта орналасқан.
$$k < \frac{1}{2} + \sqrt{2n}$$
 екенін дәлелдеңіз.