

Тақырып: Геометрия алгебраға көмектеседі.

1. $\sqrt{1+x^2-x} + \sqrt{1+x^2-x\sqrt{3}}$ өрнегінің ең кіші мәнін табыңыз.

2. (Математика пәні мұғалімдерінің II Республикалық олимпиадасы, 2021).
 a, b, c оң сандары үшін теңсіздікті дәлелдеңіз

$$\sqrt{a^2 + 2b^2 - 2ab} + \sqrt{c^2 + 2b^2 - 2cb} \geq \sqrt{a^2 + c^2}.$$

3. Теңдеулер жүйесінің

$$\begin{cases} x^2 + xy + y^2 = 4, \\ x^2 + xz + z^2 = 9, \\ y^2 + yz + z^2 = 36 \end{cases}$$

оң сандарда шешімі бар ма?

4. (VII Халықаралық математика мұғалімдерінің шығармашылық байқауы, 2019).

Егер $x + y + z = 84$ екені белгілі болса, $\sqrt{x^2 + 16} + \sqrt{y^2 + 9} + \sqrt{z^2 + 36}$ –тің ең кіші мәнін табыңыз.

5. Егер $x, y, z > 0$ және

$$\begin{cases} x^2 + xy + \frac{y^2}{3} = 25, \\ \frac{y^2}{3} + z^2 = 16, \\ z^2 + zx + x^2 = 9 \end{cases}$$

болса, $M = xy + 2yz + 3xz - ?$

6. (Савин турнирі) Егер $a, b, c > 0$ және $abc(a + b + c) = 3$ болса,
 $(a + b)(b + c)(c + a) \geq 8$

теңсіздігін дәлелдеңіз.

7. (Колмогоров турнирі) x, y оң сандары үшін

$$\sqrt{x^2 - x + 1}\sqrt{y^2 - y + 1} + \sqrt{x^2 + x + 1}\sqrt{y^2 + y + 1} \geq 2(x + y)$$

теңсіздігін дәлелдеңіздер.

8. a, b, c оң сандары үшін

$$\begin{aligned} & \sqrt{4a^2 + b^2 + c^2 + 4ab + 4ac - 2bc} \\ & + \sqrt{4b^2 + a^2 + c^2 + 4ab + 4bc - 2ac} \\ & \geq \sqrt{4c^2 + a^2 + b^2 + 4ac + 4bc - 2ab} \end{aligned}$$

теңсіздігін дәлелдеңіздер.

Үй жұмысы. Геометрия алгебраға көмектеседі.

1. Теңдеуді шешіңіз:

$$\sqrt{1+x^2} + \sqrt{1+x^2-x\sqrt{3}} = \sqrt{3}.$$

2. a, b, c оң сандары үшін теңсіздікті дәлелдеңіз

$$\sqrt{a^2 - ab + b^2} + \sqrt{b^2 - bc + c^2} \geq \sqrt{a^2 + ac + c^2}.$$

3. x, y, z оң сандары үшін $x^2 + y^2 = 4$, $x^2 + z^2 + xz = 5$, $z^2 + y^2 + \sqrt{3}yz = 1$ орындалса, $2xy + yz + \sqrt{3}xz = ?$

4. x, y оң сандары үшін теңдеуді шешіңіз:

$$\sqrt{9 - 3\sqrt{3}x + x^2} + \sqrt{x^2 - \sqrt{3}xy + y^2} + \sqrt{y^2 - 4\sqrt{3}y + 16} = 5.$$

5. x, y оң сандары үшін

$$\sqrt{25 - 5\sqrt{3}x + x^2} + \sqrt{x^2 - \sqrt{3}xy + y^2} + \sqrt{y^2 - 12\sqrt{3}y + 144} = 13$$

орындалса, $5x + 12y + xy = ?$

6. x, y, z оң сандары үшін

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + xy = 3, \\ y^2 + z^2 + yz = 16 \end{cases}$$

орындалса, $xy + yz + zx$ қосындысының ең үлкен мәнін табыңыз.

7. $a, b, c > 0$ сандары үшін

$$\sqrt{d^2 - c^2} + \sqrt{b^2 - c^2} \leq \frac{ab}{c}.$$

8. (Математика пәні бойынша мұғалімдердің IV Халықаралық ашық шығармашылық байқауы – IMPACT OLYMPIAD, 2022) Теңдеулер жүйесін шешіңіз:

$$\begin{cases} \sqrt{x^2 + 9} + \sqrt{y^2 + 16} + \sqrt{z^2 + 25} = 37, \\ x + y + z = 35, \\ x \geq 0, \quad y \geq 0, \quad z \geq 0. \end{cases}$$

9. Егер $x, y, z > 0$ және $xyz(x + y + z) = 1$ болса,

$$(x + y)(x + z) \geq 2$$

теңсіздігін дәлелдеңіз.