

Тақырып: Алмастыру теңсіздігі

$a_1, a_2, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n$ нақты сандарын өсу ретімен жазайық:

$$a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n \text{ және } b_1 \leq b_2 \leq \dots \leq b_n$$

$(c_1, \dots, c_n)$ сандары $(a_1, \dots, a_n)$ сандардың алмастырылуы болса,

$$\begin{aligned} a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n &\geq a_1 c_1 + a_2 c_2 + \dots + a_n c_n \\ &\geq a_n b_1 + a_{n-1} b_2 + \dots + a_1 b_n \end{aligned}$$

теңсіздігі орындалады.

1. $(c_1, \dots, c_n)$ сандары $(a_1, \dots, a_n)$ сандардың алмастырылуы болса,

$$a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2 \geq a_1 c_1 + a_2 c_2 + \dots + a_n c_n.$$

2. $(c_1, \dots, c_n)$ сандары $(a_1, \dots, a_n)$ сандардың алмастырылуы болса,

$$\frac{c_1}{a_1} + \frac{c_2}{a_2} + \dots + \frac{c_n}{a_n} \geq n.$$

3. Кез келген a, b, c сандары үшін

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ac.$$

4. (IMO, 1964) a, b, c — үшбұрыш қабырғалары болса,

$$a^2(b + c - a) + b^2(a + c - b) + c^2(a + b - c) \leq 3abc.$$

5. (IMO, 1983) a, b, c — үшбұрыш қабырғалары болса,

$$a^2 b(a - b) + b^2 c(b - c) + c^2 a(c - a) \geq 0.$$

6. (Несбит теңсіздігі) Кез келген оң a, b, c сандары үшін

$$\frac{a}{b + c} + \frac{b}{c + a} + \frac{c}{a + b} \geq \frac{3}{2}.$$

7. (IMO, 1995) $a, b, c > 0, abc = 1$ сандары үшін

$$\frac{1}{a^3(b + c)} + \frac{1}{b^3(c + a)} + \frac{1}{c^3(a + b)} \geq \frac{3}{2}.$$

8. (ARMO, 1998) Кез келген оң a, b, c сандары үшін

$$\left(1 + \frac{a}{b}\right) \left(1 + \frac{b}{c}\right) \left(1 + \frac{c}{a}\right) \geq 2 \left(1 + \frac{a + b + c}{\sqrt[3]{abc}}\right).$$

9. (Чебышев теңсіздігі) $a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n$ және $b_1 \leq b_2 \leq \dots \leq b_n$ сандары үшін

$$\frac{a_1 b_1 + \dots + a_n b_n}{n} \geq \frac{a_1 + \dots + a_n}{n} \cdot \frac{b_1 + \dots + b_n}{n}.$$

10. $a_1, \dots, a_n$ оң сандары және $s = a_1 + \dots + a_n$.

$$\frac{s}{s - a_1} + \dots + \frac{s}{s - a_n} \geq \frac{n^2}{n - 1}$$

теңсіздігін дәлелдеңіз.

Үй жұмысы. Алмастыру теңсіздігі

1. Кез келген оң a, b, c сандары үшін

$$a^3 + b^3 + c^3 \geq a^2 b + b^2 c + c^2 a.$$

2. (IMO, 1975) $x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n$ және $y_1 \leq y_2 \leq \dots \leq y_n$ сандары берілген. $(z_1, \dots, z_n)$ сандары $(y_1, \dots, y_n)$ сандардың алмастырылуы болса,

$$(x_1 - y_1)^2 + \dots + (x_n - y_n)^2 \leq (x_1 - z_1)^2 + \dots + (x_n - z_n)^2$$

екенін дәлелдеңіз.

3. $a, b, c > 0$ және $abc = 1$ сандары үшін

$$a^3 + b^3 + c^3 + (ab)^3 + (bc)^3 + (ca)^3 \geq 2(a^2 b + b^2 c + c^2 a).$$

4. Кез келген оң a, b, c сандары үшін

$$\frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{c^2} + \frac{c^2}{a^2} \geq \frac{b}{a} + \frac{c}{b} + \frac{a}{c}.$$

5. Кез келген оң a, b, c сандары үшін

$$\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} \geq \frac{a + b + c}{abc}.$$

6. a, b, c — үшбұрыш қабырғалары болса,

$$\frac{a}{b + c - a} + \frac{b}{c + a - b} + \frac{c}{a + b - c} \geq 3.$$

7. (IMO, 1978) $x_1, \dots, x_n$ әртүрлі оң бүтін сандар үшін

$$\frac{x_1}{1^2} + \frac{x_2}{2^2} + \dots + \frac{x_n}{n^2} \geq \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}.$$

8. $a, b, c, d \in [0,1]$ сандары үшін

$$\frac{a}{1+b} + \frac{b}{1+c} + \frac{c}{1+d} + \frac{d}{1+a} \leq 2.$$

9. $a, b, c > 0$ үшін

$$\frac{a^2}{b^2 + bc} + \frac{b^2}{c^2 + ca} + \frac{c^2}{a^2 + ab} \geq \frac{3}{2}.$$

10. (“Жібек жолы” олимпиадасы, 2014) Теріс емес a, b, c сандары үшін $a^3 + b^3 + c^3 + abc = 4$ теңдігі орындалса, онда $a^3b + b^3c + c^3a \leq 3$ теңсіздігін дәлелдеңіздер.