

Тақырып: Штурм әдісін қолдану

Неміс математигі Р.Штурм ұсынған әдіс әртүрлі қолданбалардан басқа, белгілі бір шарттар болған кезде теңсіздіктерді бағалауға мүмкіндік береді. Бұл әдісті қолдану арқылы бірқатар теңсіздіктерді дәлелдеуге болады.

1. $x_1, x_2, \dots, x_n$ оң сандардың көбейтіндісі 1-ге тең болса, $x_1 + x_2 + \dots + x_n \geq n$ екенін дәлелдеңіз.

2. $x_1, x_2, \dots, x_n$ оң сандардың қосындысы 1-ге тең болса, $x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 \geq \frac{1}{n}$ екенін дәлелдеңіз.

3. (AM – GM теңсіздігі) $x_1, \dots, x_n > 0$ үшін

$$\frac{x_1 + \dots + x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1 \dots x_n}.$$

4. $x_1 + x_2 + \dots + x_n = 1, x_1, x_2, \dots, x_n > 0, n \geq 2$ сандары үшін

$$\frac{(1+x_1)(1+x_2) \dots (1+x_n)}{(1-x_1)(1-x_2) \dots (1-x_n)} \geq \left(\frac{n+1}{n-1}\right)^n$$

5. $x, y, z \geq 0$ және $x + y + z = 1$ үшін

$$0 \leq xy + yz + zx - 2xyz \leq \frac{7}{27}.$$

6. α, β, γ – үшбұрыш бұрыштары болса

$$\cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma \leq \frac{3}{2}.$$

7. Берілген шеңберге іштей сызылған және бұрыштары 75° аспайтын үшбұрыштардан периметрі ең үлкен болатын үшбұрышты табыңыз.

8. Берілген шеңберге іштей сызылған және бұрыштары 75° аспайтын үшбұрыштардан периметрі ең кіші болатын үшбұрышты табыңыз.

Үй жұмысы. Штурм әдісін қолдану

1. $x_1, x_2, \dots, x_n$ оң сандардың ($n \geq 2$) қосындысы 1-ге тең.

$$\left(\frac{1}{x_1^2} - 1\right)\left(\frac{1}{x_2^2} - 1\right) \dots \left(\frac{1}{x_n^2} - 1\right) \geq (n^2 - 1)^n$$

теңсіздігін дәлелдеңіз.

2. $\sqrt{\frac{x_1^2 + \dots + x_n^2}{n}} \geq \frac{x_1 + \dots + x_n}{n}$ теңсіздігін дәлелдеңіз.

3. $x_1, \dots, x_n > 0$ және $x_1 + \dots + x_n = 1$ сандары үшін

$$\frac{(1 - x_1) \dots (1 - x_n)}{x_1 \dots x_n} \geq (n - 1)^n$$

теңсіздігін дәлелдеңіз.

4. $x, y, z \geq 0$ және $x + y + z = \frac{1}{2}$ үшін

$$\frac{1 - x}{1 + x} \cdot \frac{1 - y}{1 + y} \cdot \frac{1 - z}{1 + z} \geq \frac{1}{3}$$

5. $x_1, \dots, x_n \geq 0$ сандары үшін

$$\frac{1}{1 + x_1} + \dots + \frac{1}{1 + x_n} \geq \frac{n^2}{n + x_1 + \dots + x_n}$$

теңсіздігін дәлелдеңіз.

6. $x_1, \dots, x_n \geq 1$ және $n \geq 2$ сандары үшін

$$\frac{1}{1 + x_1} + \dots + \frac{1}{1 + x_n} \geq \frac{n}{1 + \sqrt[n]{x_1 \dots x_n}}$$

теңсіздігін дәлелдеңіз.

7. α, β, γ – үшбұрыш бұрыштары болса

$$\sin \alpha \sin \beta \sin \gamma \leq \frac{3\sqrt{3}}{8}.$$