

Тақырып: Айнымалыларды алмастыру тәсілі

1. Теңсіздікті дәлелдеңіз

$$-\frac{1}{2} \leq \frac{(x+y)(1-xy)}{(1+x^2)(1+y^2)} \leq \frac{1}{2}.$$

2. $m, n \geq 1$ үшін

$$n\sqrt{m-1} + m\sqrt{n-1} \leq mn.$$

3. $x \geq 1$ үшін $x > \sqrt{x-1} + \sqrt{x(\sqrt{x}-1)}$.

4. Егер $a, b, c > 0, a + b + c = 1$ болса,

$$a^3 + b^3 + c^3 \geq \frac{1}{9}.$$

5. Егер $a, b, c > 0$ және $abc = 1$ болса,

$$\frac{1}{1+a+b} + \frac{1}{1+b+c} + \frac{1}{1+a+c} \leq 1.$$

6. $n \in \mathbb{N}$ үшін $1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} \geq n \sqrt{\frac{2}{n+1}}$.

7. $a_i, b_i > 0, i = 1, 2, \dots, n$ болса,

$$\sqrt[n]{(a_1 + b_1) \dots (a_n + b_n)} \geq \sqrt[n]{a_1 \dots a_n} + \sqrt[n]{b_1 \dots b_n}.$$

8. $a_i, b_i > 0, i = 1, 2, \dots, n$ болса,

$$\frac{a_1 b_1}{a_1 + b_1} + \dots + \frac{a_n b_n}{a_n + b_n} \leq \frac{(a_1 + \dots + a_n)(b_1 + \dots + b_n)}{(a_1 + \dots + a_n) + (b_1 + \dots + b_n)}.$$

Үй жұмысы. Айнымалыларды алмастыру тәсілі

1. $a^2 + b^2 = 1$ берілген. Келесі теңсіздіктерді дәлелдеңіз:

а) $|a + b| \leq \sqrt{2}$;

ә) $|a - b| \leq \sqrt{2}$;

б) $|ab| \leq \frac{1}{2}$;

в) $|a^2b + ab^2| \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$.

2. $0 \leq a \leq 2$ және $0 \leq b \leq 3$ үшін

$$4 \leq a^2 + b^2 + ab + \sqrt{4 - a^2}\sqrt{9 - b^2} \leq 19.$$

3. $m > n > 0$ үшін

$$\sqrt{m^2 - n^2} + \sqrt{2mn - n^2} \geq m.$$

4. Кез келген жеті санның ішінен

$$0 \leq \frac{x - y}{1 + xy} \leq \frac{1}{\sqrt{3}}$$

орындалатындай x, y сандарын табуға болатынын дәлелдеңіз.

5. Кез келген a, b сандары үшін

$$\frac{|a - b|}{\sqrt{1 + a^2}\sqrt{1 + b^2}} \leq \frac{|a - c|}{\sqrt{1 + a^2}\sqrt{1 + c^2}} + \frac{|b - c|}{\sqrt{1 + b^2}\sqrt{1 + c^2}}.$$

6. $a, b, c > 0, a + b + c = abc$ сандары үшін

$$\frac{1}{\sqrt{1 + a^2}} + \frac{1}{\sqrt{1 + b^2}} + \frac{1}{\sqrt{1 + c^2}} \leq \frac{3}{2}.$$