

Сәйкестік

Анықтама. Егер бірінші жиынның әрбір элементіне екінші жиынның дәл бір элементін сәйкестендірсе және екінші жиынның әрбір элементіне бірінші жиынның дәл бір элементі сәйкес келсе, онда бұл екі жиынның арасында *өзара бірмәнді сәйкестік (биекция)* бар деп айтамыз.

Мысал 1. $(0, 0)$ нүктесінен (m, n) нүктесіне дейін тек бүтін координаттармен оңға және жоғарыға ұзындығы 1 арақашықтыққа жүру арқылы жетуге болады. Осындай жолдардың саны неше?

Мысал 2. n элементті жиынның ішінен элементтер саны жұп болатын ішкі жиындар саны 2^{n-1} екенін дәлелдеңіз.

Мысал 3. Автобус билеті 6 цифрдан тұрады. Егер оның нөмірінің алғашқы үш цифрының қосындысы соңғы үш цифрының қосындысына тең болса, билетті бақытты билет деп атаймыз. Қандай билеттер көп: бақытты билеттер ме, әлде нөмірлері 11-ге бөлінетін билеттер ме?

Мысал 4. 100 – ден 999 – ға дейінгі барлық сандардың арасында ортаңғы цифры екі шеткі цифрлардан үлкен болатын сандар көп пе, әлде ортаңғы цифры екі шеткі цифрлардан кіші болатын сандар көп пе?

Мысал 5. 1 – ден 999999 – ға дейінгі сандар екі топқа бөлінген: бірінші топқа әрбір сан үшін оған ең жақын квадрат тақ санның квадраты болатын сандар, ал екінші топқа – ең жақын квадрат жұп санның квадраты болатын сандар кіреді. Қай топтағы сандардың қосындысы көп?

Мысал 6. Өлшемі $m \times n$ тікбұрышты экран бірлік торкөздерге бөлінген, және $(m - 1)(n - 1)$ – ден көп торкөздер жанып тұр. Егер 2×2 квадратта үш торкөз жанбай тұрса, онда төртінші торкөз де сөнеді. Дегенмен экранда әрқашан кем дегенде бір торкөз жанып тұратынын дәлелдеңіз.

Үй жұмысы

1. Шеңберде 2000 көк және бір қызыл нүкте белгіленген. Осы нүктелерден құралған бүкіл дөңес көпбұрыштар қарастырылады. Қызыл нүктесі бар көпбұрыштар көп пе, әлде қызыл нүктесі жоқ көпбұрыштар көп пе?
2. Автобус билеті 6 цифрдан тұрады. Егер оның нөмірінің алғашқы үш цифрының қосындысы соңғы үш цифрының қосындысына тең болса, билетті бақытты билет деп атайды. Бақытты билеттердің нөмірлерінің қосындысы 13 – ке бөлінетінін дәлелдеңіз.
3. Ешбір үш диагональ бір нүктеде қиылыспайтын дөңес n – бұрыштың диагональдарының қиылысу нүктелерінің саны қанша? (Диагональдардың ұштары қиылысу нүктелері болып саналмайды.)
4. 1-ден 1000-ға дейінгі барлық натурал сандар екі топқа бөлінген: жұп және тақ сандар. Қай топтағы әрбір санды құрауға қолданылған бүкіл цифрларының қосындысы көп және қаншаға артық?
5. Қабырғаларының ұзындығы бүтін және периметрі 2000-ға тең барлық мүмкін үшбұрыштардың саны көп пе, әлде қабырғаларының ұзындығы бүтін және периметрі 2003-ке тең барлық мүмкін үшбұрыштардың саны көп пе?
6. Елде $n > 1$ қалалар бар, кейбір қалалар екі жақты тікелей әуе рейстерімен қосылған. Бұл ретте әрбір екі қала арасында (мүмкін, транзитпен) бір ғана әуе жолы бар. Әрбір X қаласының мәрі X -тен басталатын кез келген әуе жолында қалалардың нөмірлері өсу ретімен жүретіндей, барлық қалаларды 1-ден n -ге дейінгі нөмірлеудің санын санады. Барлық мэрлер, біреуінен басқасы, олардың санау нәтижелері 2016-ға бөлінетінін байқады. Соңғы мэрдің де нәтижесі 2016-ға бөлінетінін дәлелдеңіз.