

Олимпиада талдау

1. Тақтада $1, 2, \dots, 2016, 2017$ сандары жазылған. Бір қадамда ешқайсысы 0 -ге тең емес үш қатар тұрған a, b және c сандарын алып, оларды осы ретпен жазылған $b - 1, c - 1, a - 1$ үштігіне ауыстыруға болады. Осындай қадамдармен тақтада жазылған сандардың қосындысының ең кіші қандай мәнін алуға болады?
2. ABC сүйірбұрышты үшбұрышында AB қабырғасы AC қабырғасынан үлкен. $\angle ACD = \angle CBD$ болатындай AB қабырғасынан D нүктесі алынған. E нүктесі BD кесіндісінің ортасы, ал S нүктесі BCD үшбұрышына сырттай сызылған шеңбердің центрі. A, E, S және C нүктелері бір шеңбердің бойында жататынын дәлелдеңіз.
3. $2^{2x+1} + 9 \cdot 2^x + 5 = y^2$ теңдеуін қанағаттандыратын барлық бүтін (x, y) жұптарын табыңыз.
4. Бүкіл $x, y \in R$ үшін $(x - 2)f(y) + f(y + 2f(x)) = f(x + yf(x))$ қатынасын қанағаттандыратын барлық $f: R \rightarrow R$ функциясын табыңыз.

Олимпиада талдау. Үй жұмысы

1. Барлық бұрыштарының градусық өлшемі бүтін болатындай, дөңес көпбұрыштың ең көп неше қабырғасы болуы мүмкін?
2. Барлық оң a, b, c сандары үшін теңсіздікті дәлелдеңіз

$$\frac{a^2}{3a^2 + b^2 + 2ac} + \frac{b^2}{3b^2 + c^2 + 2ab} + \frac{c^2}{3c^2 + a^2 + 2bc} \leq \frac{1}{2}$$

3. $x_1 = 0$ болатын x_n ($n = 1, 2, \dots$) тізбегі берілген. Барлық бүтін $n > 1$ үшін келесі теңдік орындалады $x_n = x_{n-1} + \left\lfloor \frac{n^2}{4} \right\rfloor$.
(Мұнда $[a]$ дегеніміз a санынан аспайтын ең үлкен бүтін санды білдіреді). x_n саны n санына бөлінетіндей барлық n санын табыңыз.
4. ABC үшбұрышы берілген. O — сырттай сызылған шеңбердің центрі, B_1 және C_1 сәйкесінше AC және AB қабырғаларының ортасы. A төбесі мен O нүктесін қамтитын, бірақ B_1 және C_1 нүктелері арқылы өтпейтін шеңберлердің ішінен ω шеңберін таңдайық. ω шеңбері OB_1 және OC_1 түзулерін сәйкесінше K және L нүктелерінде қисын. KB_1 -дің LC_1 — ге қатынасы ω шеңберінің таңдалуына тәуелсіз екенін дәлелдеңіз.